Exemple d'utilisation des méthodes d'approximation des EDO

$$\begin{cases} y''(t) = -c^2 y(t) \\ y(0) = y_0,\ y'(0) = 0 \end{cases} \quad : \quad Y'(t) = f(Y(t), t) \ ?$$

on pose $Y(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$: alors $Y'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ -c^2 y(t) \end{pmatrix}$

on a donc $Y'(t) = \begin{pmatrix} 0.\ y(t) + 1.\ y'(t) \\ -c^2.\ y(t) + 0.\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c^2 & 0 \end{pmatrix} Y(t)$

on note $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c^2 & 0 \end{pmatrix}$: alors $Y'(t) = A\,Y(t) = f(Y(t), t)$

. Euler explicite : $Y_{n+1} = Y_n + h f(Y_n, t_n) = Y_n + hAY_n = (I_2 + hA)\, Y_n$

. Euler implicite : $Y_{n+1} = Y_n + h f(Y_{n+1}, t_{n+1}) = Y_n + hA\,Y_{n+1}$

$$\iff Y_{n+1} - hA\,Y_{n+1} = Y_n \iff (I_2 - hA)\, Y_{n+1} = Y_n$$

$$\iff Y_{n+1} = (I_2 - hA)^{-1}\, Y_n$$

. Trapèzes : $Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{2}\left[f(Y_n, t_n) + f(Y_{n+1}, t_{n+1}) \right] = Y_n + \frac{h}{2}\left(AY_n + AY_{n+1} \right)$

$$\iff Y_{n+1} - \frac{h}{2} A\,Y_{n+1} = Y_n + \frac{h}{2} A\,Y_n \iff \left(I_2 - \frac{h}{2}A\right) Y_{n+1} = \left(I_2 + \frac{h}{2}A\right) Y_n$$

$$\iff Y_{n+1} = \left(I_2 - \frac{h}{2}A\right)^{-1} \left(I_2 + \frac{h}{2}A\right) Y_n$$

Euler explicite :	$Y_{n+1} = (I_2 + hA)\, Y_n$
Euler implicite :	$Y_{n+1} = (I_2 - hA)^{-1}\, Y_n$
trapèzes :	$Y_{n+1} = \left(I_2 - \frac{h}{2}A\right)^{-1} \left(I_2 + \frac{h}{2}A\right) Y_n$